

توصیف حالت در مکانیک کوانتومی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۰ آبان ۱۳۹۳

۱ مقدمه

در درس های مقدماتی مکانیک کوانتومی آموخته ایم که حالت یک سیستم فیزیکی با یک بردار در یک فضای هیلبرت توصیف می شود. به طور خاص وقتی در مورد ذرات اسپین ۱/۲ حرف می زنیم می گوئیم که ذره مثلاً در حالت $|z+\rangle$ است یا در حالت $|x+\rangle$ قرار دارد. در این بحث های مقدماتی به ندرت توجه کرده ایم که این حالت ها حالت های خالص و تقریباً ایده آل هستند. ما وقتی حالت یک ذره را می شناسیم که روی آن اندازه گیری کرده باشیم. در غیر این صورت اطلاع خیلی کمی از حالت ذره داریم و نمی توانیم آن را مشخص کنیم. به عنوان مثال باریکه فوتون هایی که از یک صفحه پولاروید خارج می شوند در یک حالت قطبیده مشخص مثل $|H\rangle$ قرار دارد چرا که صفحه پولاروید تنها فوتونهایی را از خود عبور داده که قطبش آنها در راستای افقی باشند. به این ترتیب صفحه پولاروید روی باریکه فوتون ها یک اندازه گیری انجام داده و فوتون های در حالت $|H\rangle$ را فیلتر کرده است.^۱

اما باریکه فوتون هایی که به دستگاه پولاروید می تابند هیچ نوع حالت مشخصی ندارد. به عبارت بهتر در این باریکه ذراتی با هر نوع قطبشی یافت می شود. در غیاب هر نوع اندازه گیری تنها می توان به اطلاعات آماری در مورد توزیع این حالت ها بسنده کرد و گفت که در این باریکه درصد ذرات در حالت $|\psi_i\rangle$ هستند. در چنین حالتی هرگاه بخواهیم متوسط یک مشاهده پذیر مثل O را که روی این باریکه از ذرات اندازه

^۱ به طور کلی هر نوع عمل اندازه گیری یک عمل فیلترینگ است.

گیری کنیم از این اطلاعات آماری استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$\langle O \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | O | \psi_i \rangle. \quad (۱)$$

این عبارت را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\langle O \rangle = \text{tr}(O\rho) \quad (۲)$$

که در آن ρ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (۳)$$

ماتریس ρ ماتریس چگالی خوانده می شود و همانطور که از رابطه بالا پیداست این ماتریس توصیف کننده ذرات باریکه است. می گوییم که ذرات باریکه در یک حالت خالص قرار ندارند بلکه در یک حالت مخلوط یا آمیخته قرار دارند. تمام اطلاعاتی که می توان در چارچوب مکانیک کوانتومی از این باریکه ذرات استخراج کرد در ماتریس چگالی آن نهفته است و به همین دلیل ماتریس چگالی را ماتریس حالت این ذرات می گوییم.

دراین جا توجه به یک مسئله مهم ضروری است. برای آنکه از ماتریس چگالی صحبت کنیم نیازی نیست که حتما یک باریکه از ذرات داشته باشیم. حتی برای یک ذره نیز می توان از ماتریس چگالی سخن گفت. فرض کنید که تنها یک ذره در آزمایشگاه به شما داده شده است و نه یک باریکه از ذرات و به شما گفته شده است که حالت این ذره مشخص نیست. تنها این معلوم است که این ذره با احتمال p_1 در حالت $|\psi_1\rangle$ است و با احتمال p_2 در حالت $|\psi_2\rangle$ و الی آخر. بازهم شما برای توصیف نتایج آزمایش های خود بر روی این ذره به ماتریس چگالی نیاز خواهید داشت.

ماتریس ρ به شکلی که در بالا معرفی شده است خاصیت های معینی دارد که شما ب راحتی می توانید درستی آنها را بیازمایید: این خاصیت ها این ها هستند:

$$\begin{aligned} \rho^\dagger &= \rho, \\ \text{tr} \rho &= 1, \\ \rho &\geq 0. \end{aligned} \quad (۴)$$

خاصیت آخر که به آن مثبت بودن ماتریس گفته می شود به این معنی است که تمام ویژه مقدارهای ρ بزرگتر یا مساوی با صفر هستند و یا اینکه

متوسط ماتریس ρ روی هر برداری بزرگتر یا مساوی با صفر است، یعنی

$$\langle v|\rho|v\rangle \geq 0 \quad \forall v. \quad (5)$$

هرگاه که در رابطه (۳) تنها یکی از احتمالات غیرصفر باشد خواهیم داشت

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (6)$$

و در این حالت می‌گوییم که ذره در یک حالت خالص^۲ است.

■ تمرین: الف: نشان دهید که یک حالت خالص است اگر و فقط اگر در شرط زیر صدق کند:

$$\rho^2 = \rho \quad (7)$$

ب: تست کردن شرط بالا ممکن است کمی وقت ببرد. بنابراین ثابت کنید که یک حالت خالص است اگر و فقط اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$tr(\rho^2) = 1. \quad (8)$$

دقت کنید که ابهامی که ما در مورد حالت یک سیستم داریم ممکن است شامل همه درجات آزادی نباشد. به عنوان مثال ممکن است که در مورد یک ذره تکانه آن را به طور دقیق بدانیم ولی در مورد اسپین آن اطلاعات چندانی نداشته باشیم. در این صورت حالت این ذره به صورت $\rho = |p\rangle\langle p| \otimes \rho_{spin}$ خواهد بود.

آنچه که گفتیم تنها یک نحوه نگاه به ماتریس چگالی بود. این مفهوم را به طریق دیگری نیز می‌توانیم بفهمیم. تا اینجا آموختیم که وقتی اطلاعات مشخصی در باره یک ذره نداریم و نمی‌توانیم آن را با یک مجموعه از مشاهده پذیرهای کامل توصیف کنیم می‌بایست آن بخش از درجات آزادی را که در مورد آنها اطلاعات کافی نداریم با یک ماتریس چگالی توصیف کنیم. در بسیاری اوقات ما نه به کل یک سیستم کوانتومی بلکه به اجزای آن علاقمندیم. به عنوان مثال در یک تله یونیه که چندین یون را در یک حالت کوانتومی نگاه داشته است علاقمندیم که حالت یکی از یون‌ها را تعیین کنیم، و روی آن اندازه‌گیری کنیم. به عنوان یک مثال دیگر توجه می‌کنیم که امروزه در آزمایشگاه می‌توانیم حالت‌هایی از

^۲pure

یک زوج فوتون تهیه کنیم مثل حالت زیر

$$|\psi\rangle_{A,B} = \alpha|H, V\rangle + \beta|V, H\rangle \quad (9)$$

که در آن H و V نشان دهنده قطبش فوتون ها در راستای افقی و عمودی است. می توانیم چنین فوتون هایی را ده ها کیلومتر از یک دیگر جدا کنیم بدون اینکه قطبش آنها دچار تغییر شود. فرض کنید که آلیس و باب چنین زوج فوتونی را تهیه کرده اند و فوتون اول در آزمایشگاه آلیس و فوتون دوم در آزمایشگاه باب قرار دارد که بسیار از آزمایشگاه آلیس دور است. شاخص های A و B برای شناسایی فوتون های آلیس و باب بکار رفته است. در چنین حالتی وقتی که آلیس روی فوتونی که در آزمایشگاه اش قرار دارد آزمایش می کند می خواهد که نتایج آزمایش هایش را در چارچوب مکانیک کوانتومی با حالتی که به آن فوتون نسبت می دهد توصیف کند. سوالی که با آن روبرو است این است که فوتون اش در چه حالتی است؟ و چگونه می بایست آن را توصیف کند. مطمئناً این فوتون در حالت $|H\rangle$ یا $|V\rangle$ نیست.

■ تمرین: آیا آلیس می تواند بگوید که فوتون اش در حالت

$$\sqrt{a}|H\rangle + \sqrt{b}|V\rangle \quad (10)$$

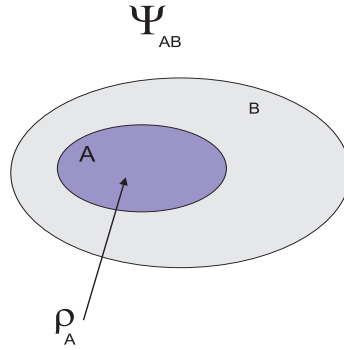
است؟ چرا؟

پاسخ این سوال این است که حالت فوتون آلیس با یک ماتریس چگالی توصیف می شود. پاسخ این سوال را به صورت کلی در زیر می آوریم .

سیستمی را در نظر بگیرید که از دو بخش A و B تشکیل شده است. بنا بر اصول مکانیک کوانتومی به این سیستم فضای هیلبرت $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ نسبت داده می شود. فرض کنید که $\{|i\rangle\}_{i=1}^M$ یک پایه برای \mathcal{H}_A و $\{|\mu\rangle\}_{\mu=1}^N$ یک پایه برای \mathcal{H}_B باشد. در این صورت یک حالت کلی از سیستم AB توسط بردار حالت زیر داده می شود، شکل 1:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} \psi_{i\mu} |i, \mu\rangle. \quad (11)$$

حال هر عملگر M_A روی دستگاه A چیزی نیست جز عملگری به شکل $M \otimes I$. در نتیجه خواهیم داشت :



شکل ۱: یک سیستم بسته با یک بردار حالت توصیف می شود، ولی اجزای آن با یک ماتریس چگالی مشخص خواهند شد.

$$\begin{aligned}\langle M \rangle_A &= \langle \psi | M \otimes I | \psi \rangle = tr_{AB}((M \otimes I) |\psi\rangle \langle \psi|) = tr_A(tr_B((M \otimes I) |\psi\rangle \langle \psi|)) \\ &= tr_A(M \rho_A)\end{aligned}\quad (12)$$

که در آن

$$\rho_A = tr_B(|\psi\rangle \langle \psi|) \quad (13)$$

ماتریس چگالی دستگاه A نامیده می شود. به این ترتیب هر عنصر ماتریسی روی دستگاه A را می توان به صورت $tr(M\rho)$ نوشت که در آن ρ از رابطه بالا تعیین می شود و جانشین حالت کوانتومی دستگاه A است. به طریق مشابه ماتریس چگالی دستگاه B با رابطه $\rho_B = tr_A(|\psi\rangle \langle \psi|)$ داده می شود. می توان فرم صریح تر ماتریس چگالی را نیز بدست آورد. با توجه به رابطه (11) خواهیم داشت:

$$\rho_A = \sum_{i,j} \rho_{ij} |i\rangle \langle j| \quad (14)$$

که در آن

$$(\rho_A)_{ij} = \sum_{\mu} \psi_{i\mu} \psi_{j\mu}^*, \quad (15)$$

و

$$\rho_B = \sum_{\mu;\nu} \rho_{\mu\nu} |\mu\rangle \langle \nu|, \quad (16)$$

که در آن

$$(\rho_B)_{\mu\nu} = \sum_i \psi_{i\mu} \psi_{i\nu}^* \quad (17)$$

با توجه به این عبارت ها براحتی می توان خواص سه گانه ماتریس چگالی را تحقیق کرد یعنی این که ρ یک ماتریس هرمیتی مثبت با رد برابر با واحد است.

■ تمرین: با استفاده از مفهوم رد جزئی نشان دهید که

$$\rho_A = tr_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|). \quad (18)$$

با توجه به آنچه که گفته شد حال می توانیم بگوییم که :

حالت یک دستگاه فیزیکی با یک ماتریس چگالی ρ ، که یک ماتریس هرمیتی، مثبت و با رد یک است داده می شود. ارزش انتظاری هر مشاهده پذیر که با عملگر هرمیتی A داده می شود، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\langle A \rangle_\rho = tr(A\rho). \quad (19)$$

■ تمرین: ماتریس زیر داده شده است که روی فضای هیلبرت چهاربعدی $H_A \otimes H_B$ اثر می کند و هر دو فضا دوبعدی هستند.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad (20)$$

مقادیر زیر را پیدا کنید:

$$tr_A(M), \quad tr_B(M), \quad tr(M).$$

نشان دهید که

$$tr_A(tr_B(M)) = tr_B(tr_A(M)). \quad (21)$$

این خاصیت آخر را به صورت کلی ثابت کنید.

۲ حالت های یک کیوبیت

کیوبیت ساده ترین سیستم کوانتومی است که فضای هیلبرت اش دو بعد دارد. این فضای دوبعدی را با C^2 نشان می دهیم که فضای بردارهای دوبعدی مختلط است. حالت یک کیوبیت را معمولاً به صورت

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (22)$$

می نویسیم که در آن $|0\rangle$ و $|1\rangle$ پایه محاسباتی خوانده می شود. هرگاه عملگرهای پائولی را به صورت زیر بنویسیم:

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

آنگاه پایه محاسباتی همان ویژه بردارهای عملگر Z خواهد بود. ویژه بردارهای عملگر X این ها هستند:

$$|x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |x, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \quad (24)$$

معمولاً این ویژه بردارها را به دلیل وفور استفاده از آنها با $|+\rangle$ و $|-\rangle$ نشان می دهیم. همانطور که از درس های مکانیک کوانتومی می دانیم می توان حالت یک کیوبیت را به صورت زیر پارامتریزه کرد

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (25)$$

که در آن $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq \phi \leq 2\pi$. چنین حالتی در واقع ویژه بردار عملگر پائولی $\hat{n} \cdot \sigma$ است که در آن \hat{n} بردار یکه ای است که در روی کره دو بعدی در جهت مشخص شده توسط زاویه θ و ϕ قرار گرفته است یعنی $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$.

۳ کره بلوخ

در بخش قبلی حالت خالص یک کیوبیت را معرفی کردیم. کلی ترین حالت یک کیوبیت با یک ماتریس چگالی دو در دو داده می شود. این ماتریس را با ρ نشان می دهیم. از آنجا که ماتریس یک و ماتریس های پائولی یک پایه برای فضای ماتریس های دو در دو تشکیل می دهند می توان این ماتریس را به شکل زیر نوشت:

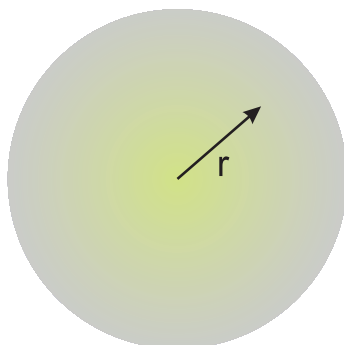
$$\rho = \frac{1}{2}(r_0 I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_0 + z & x - iy \\ x + iy & r_0 - z \end{pmatrix} \quad (26)$$

که در آن $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ، ماتریس های پائولی هستند و ضریب $1/2$ برای راحتی بیرون کشیده شده است.

حال دقت می کنیم که:

الف : ρ هرمیتی است. بنابراین ضرایب \vec{r} , r_0 حقیقی هستند.

ب : $tr(\rho) = 1$. بنابراین $r_0 = 1$.



شکل ۲: کره بلوخ. نقاط روی کره متناظر با حالت های خالص و نقاط درون کره متناظر با حالت های آمیخته هستند.

ج : $\rho \geq 0$. برای تامین این شرط می بایست ویژه مقادیرهای ρ را حساب کنیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که ویژه مقادیرهای ρ عبارتند از:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm r) \quad (27)$$

که در آن r اندازه بردار \vec{r} است.

بنابراین برای مثبت بودن کافی است که طول بردار \vec{r} از یک کمتر باشد: یعنی $\vec{r} \leq 1$. به این ترتیب بین هرماتریس چگالی و یک نقطه از یک کره به شعاع واحد یک تناظر یک به یک برقرار می شود. این کره کره بلوخ نام دارد که در شکل 3 نشان داده شده است. نقاط روی سطح کره بلوخ نقاطی هستند که در آنها $r = 1$ و بنابراین ویژه مقادیر ρ برابر با یک و صفر هستند. در نتیجه این نقاط متناظر با حالت های خالص هستند. درواقع براحتی می توان نشان داد که هرگاه $r = 1$ باشد یعنی r برابر با یک بردار یکه \mathbf{n} باشد آنگاه

$$\rho \equiv \frac{1}{2}(I + \mathbf{n} \cdot \sigma) = |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \quad (28)$$

که در آن $|\mathbf{n}\rangle$ حالت یک ذره با اسپین درجهت بردار یکه \mathbf{n} است. از طرف دیگر مرکز کره یعنی $r = 0$ متناظر با حالت کاملاً مخلوط $\rho = \frac{1}{2}I$ است. هرچه از مرکز کره به طرف مرز پیش برویم به درجه خلوص حالت ها اضافه می شود.

■ تمرین: نشان دهید که حالت $\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{n} \cdot \sigma)$ متناظر با حالت خالص $|\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}|$ است.

۱.۳ گیت های یک کیوبیتی

یک عملگر یکانی روی یک کیوبیت را یک گیت تک-کیوبیتی می خوانیم. بنابراین یک گیت تک-کیوبیتی به این صورت نوشته می شود:

$$U = e^{i\phi} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (29)$$

که در آن $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. چنین گیتی را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$U = e^{i\phi I + i\theta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \quad (30)$$

به این ترتیب یک گیت تک-کیوبیتی را چهار پارامتر θ, ϕ و \mathbf{n} پارامتریزه می شود. البته این فقط یکی از راه های پارامتریزه کردن است و خواننده در تمرین ها می تواند راه های دیگری غیر از این نیز یاد بگیرد. مشهورترین عملگرهای تک کیوبیتی همان عملگرهای پاولی X ، Y و Z هستند. عملگر X را عملگر بیت-برگردان یا $bit - flip$ و عملگر Z را عملگر فاز-برگردان یا $phase - flip$ می نامند. دلیل اش هم واضح است زیرا:

$$X(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|1\rangle + b|0\rangle, \quad Z(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|0\rangle - b|1\rangle. \quad (31)$$

عملگر XZ نیز که منهای یک فاز i همان عملگر Y است هم فاز و هم بیت را برمی گرداند. عملگر دیگری که خیلی مهم است عملگر هادامارد است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

این عملگر ویژه بردارهای عملگرهای X و Z را به هم تبدیل می کند.

■ **تمرین:** نشان دهید که $H^2 = I$. هم چنین نشان دهید که عملگر هادامارد را می توان به صورت زیر نوشت:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r,s=0,1} (-1)^{rs} |r\rangle \langle s|. \quad (33)$$

■ تمرین: حالتی را در نظر بگیرید مثل

$$|\phi\rangle := \sum_{r=0,1} \phi_r |r\rangle, \quad (34)$$

نشان دهید که

$$H|\phi\rangle = |\tilde{\phi}\rangle = \sum_{r=0,1} \tilde{\phi}_r |r\rangle, \quad (35)$$

که در آن

$$\tilde{\phi}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s=0,1} (-1)^{rs} \phi_s. \quad (36)$$

■ تمرین: حالت های زیر را که به حالت های Bell موسوم هستند در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} |\phi_+\rangle_{A,B} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,0\rangle + |1,1\rangle) \\ |\phi_-\rangle_{A,B} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,0\rangle - |1,1\rangle) \\ |\psi_+\rangle_{A,B} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,1\rangle + |1,0\rangle) \\ |\psi_-\rangle_{A,B} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,1\rangle - |1,0\rangle). \end{aligned} \quad (37)$$

نشان دهید که این حالت ها همه برهم عمودند و تشکیل یک پایه برای فضای دوکیوبیت یعنی فضای $C^2 \otimes C^2$ می دهند.

ماتریس های چگالی ρ_A و ρ_B را برای همه حالت ها بدست آورید.

■ تمرین: بین آلیس و باب یک حالت دوکیوبیتی $|\phi_+\rangle$ به اشتراک گذاشته شده است. ولی به دلایلی این حالت دچار خطا شده است. آنها

حدس می زنند که این حالت با احتمال p_1 تبدیل به حالت $|\phi_-\rangle$ ، با احتمال p_2 تبدیل به حالت $|\psi_+\rangle$ ، با احتمال p_3 تبدیل به حالت $|\psi_-\rangle$ شده و با احتمال $1 - p_1 - p_2 - p_3$ نیز دست نخورده است. حالت کیوبیت هایی که بین آنها به اشتراک گذاشته است چیست؟ ماتریس چگالی آلیس و باب را بدست آورید.

■ تمرین: حالت زیر یک حالت GHZ نامیده می شود:

$$|GHZ\rangle_{A,B,C} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,0,0\rangle + |1,1,1\rangle). \quad (38)$$

الف: هفت حالت دیگر در فضای سه کیوبیت بسازید که همه برهم عمود باشند و به همراه حالت فوق یک پایه کامل برای فضای هیلبرت سه کیوبیت تشکیل دهند.

ب: ماتریس های چگالی ρ_A, ρ_{BC} را پیدا کنید.

■ تمرین: حالت زیر یک حالت W نامیده می شود.

$$|W\rangle_{A,B,C} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1, 0, 0\rangle + |0, 1, 0\rangle + |0, 0, 1\rangle). \quad (39)$$

مراحل تمرین قبلی را برای این حالت نیز تکرار کنید.

■ تمرین: عملگر دوکیوبیتی زیر را در نظر بگیرید:

$$CNOT = \frac{1}{2}(I + \sigma_z) \otimes I + \frac{1}{2}(I - \sigma_z) \otimes \sigma_x. \quad (40)$$

نشان دهید که این عملگر کار زیر را انجام می دهد:

$$CNOT|i, j\rangle = |i, i + j, \text{ mod } 2\rangle \quad (41)$$

شکل ماتریسی این عملگر را بنویسید.

نشان دهید که عملگر زیر

$$(CNOT)(I \otimes H)$$

وقتی روی حالت های چهارگانه $|i, j\rangle$ اثر می کند حالت های چهارگانه بل را تولید می کند.

■ تمرین: عملگرهای $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ را در نظر بگیرید. ویژه بردارهای هرکدام از این عملگرها یک پایه برای فضای هیلبرت یک

کیوبیت می سازند. نشان دهید که همه این پایه ها نسبت به هم متوازن هستند. به طور کلی دو پایه $\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_N\rangle\}$ و

$\{|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, \dots, |\beta_N\rangle\}$ نسبت به هم متوازن نامیده می شوند اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$|\langle \alpha_i | \beta_j \rangle|^2 = C, \quad \forall |\alpha_i\rangle, |\beta_j\rangle, \quad (42)$$

که در آن C یک عدد ثابت است. ثابت کنید که این عدد ثابت برابر است با $\frac{1}{N}$.

۴ حالت های یک کیودیت

اگرچه طبیعی ترین کاندیدا برای ذخیره و پردازش یک واحد اطلاعات کوانتومی یک کیوبیت یعنی یک سیستم کوانتومی دوحالته است، ولی هم از نظر تئوری و هم تجربی می بایست امکان استفاده از سیستم های کوانتومی با تعداد بیشتر از دو حالت را نیز در نظر گرفت. ممکن است سرانجام یک سیستم کوانتومی d حالته تمامی ملاک های مورد نیاز برای رایانش کوانتومی، مثل قابلیت کنترل دقیق، زمان وادوسی زیاد، و هم چنین مقیاس پذیری را برآورده کند. در این صورت می بایست رایانش کوانتومی را حتماً با استفاده از این حالت ها که به آن ها کیودیت *Qudit* می گویند انجام داد. از نظر تئوری نیز نشان داده شده است که مثلاً در رمزنگاری کوانتومی استفاده از کیودیت ها امنیت پروتکل را نسبت به کیوبیت ها بالاتر می برد. هم چنین صورت بندی الگوریتم ها و فرایند های کوانتومی در بعد دلخواه باعث می شود که درک بهتر و عمیق تری از چگونگی کارکرد آنها بدست آوریم.

حالت خالص یک کیودیت (یک سیستم d حالته) به صورت زیر نوشته می شود:

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + \dots + a_{d-1}|d-1\rangle. \quad (43)$$

این حالت یک بردار d مختلط را نشان می دهد. فضای برداری این بردارهای را با C^d نشان می دهیم.

بنابراین یک حالت دلخواه از یک کیودیت با $2d - 1$ پارامتر حقیقی مشخص می شود. برای آنکه حالت های آمیخته کیودیتی را نیز بفهمیم می بایست عملگرهای هرمیتی کیودیتی را مطالعه کنیم.

می توان برای این فضا یک پایه از عملگرهای هرمیتی نیز در نظر گرفت. چنین پایه ای به صورت زیر تعریف می شود:

$$X_{ij} := E_{ij} + E_{ji}, \quad Y_{ij} := -iE_{ij} + iE_{ji}, \quad Z_i := E_{1,1} + E_{2,2} + \cdots + E_{i,i} - iE_{i+1,i+1}, \quad (44)$$

که در آن $E_{ij} = |i\rangle\langle j|$. دقت کنید که عملگرهای $X^r Z^s$ رابطه ضربی ساده ای باهم دارند ولی عملگرهای هرمیتی که در بالا تعریف کردیم رابطه جابجایی شان باهم ساده است.

■ **تمرین:** نشان دهید که تعداد این عملگرهای هرمیتی برابر است با $d^2 - 1$.

■ **تمرین:** اگر این عملگرها را به صورت کلی با Γ_i نشان دهیم، با توجه به ضرب داخلی $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^\dagger)$ که برای عملگرها تعریف می شود، نشان دهید که این عملگرها بر یکدیگر عمودند. سپس هرکدام از آنها را در ضرب مناسبی چنان ضرب کنید که به صورت زیر بهنجار باشند:

$$\langle \Gamma_i, \Gamma_j \rangle = (d^2 - d)\delta_{ij}I. \quad (45)$$

۱.۴ آیا برای کیودیت ها کره بلوخ وجود دارد؟

ماتریس چگالی یک کیودیت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho = \frac{1}{d}(I + \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Gamma}), \quad (46)$$

که در آن Γ_i , $i = 1, \dots, d^2 - 1$ یک پایه از عملگرهای هرمیتی و بدون رد در فضای یک کیودیت است و \mathbf{r} نیز یک بردار $d^2 - 1$ مولفه ای است. بنابراین یک ماتریس چگالی کیودیتی با تعداد $d^2 - 1$ پارامتر مشخص می شود که حتی برای یک کیوتریت (یعنی یک سیستم سه حالته) تعداد زیاد 8 پارامتر است. به شکل فوق مطمئن هستیم که ماتریس ρ هرمیتی و بدون رد است. اما ρ هنوز یک ماتریس چگالی نیست زیرا الزاما مثبت نیست. ویژه مقادیرهای چنین ماتریسی رابطه ساده ای با پارامترهای مشخص کننده \mathbf{r} ندارد. این رابطه هرچه که هست رابطه ای نیست که فضای ماتریس های چگالی کیودیتی را به صورت یک کره یا یک شکل هندسی ساده در بیاورد. دقت کنید که حتی در مورد

$d = 3$ نیز فضای ماتریس های چگالی یک زیرمجموعه از فضای 8 بعدی R^8 است. بنابراین تصور چنین فضایی بسیار مشکل است. از نظر هندسی و جبری در این مورد پژوهش های متعددی انجام شده و در حال انجام است.

■ **تمرین:** نشان دهید که هر ماتریس چگالی به صورت نشان داده شده در رابطه 46 در صورتی که طول بردار r برابر با واحد باشد یک حالت خالص را نشان می دهد.

عملگرهای هرمیتی ای که در بالا ساختیم تعمیم طبیعی عملگرهای پاوولی به بعد d بودند. به نحو دیگری هم می توان عملگرهای پاوولی را به بعد دلخواه تعمیم داد که برای منظورهای دیگری مناسب است. اگر دقت کنیم عملگرهای پاوولی هم هرمیتی هستند و هم یکانی. حالا تعمیمی از این عملگرها در بعد دلخواه بدست می آوریم که یکانی باشند و نه هرمیتی. برای تعمیم آنها به عملگرهای یکانی کافی است که عملگرهای X و Z را به صورت زیر به کیودیت ها تعمیم دهیم:

$$X|k\rangle = |k+1\rangle, \quad Z|k\rangle = \omega^k|k\rangle \quad (47)$$

که در آن $\omega^d = 1$. یعنی $\omega = e^{\frac{2\pi i}{d}}$ و همه جمع ها به سنج d انجام می شود. این عملگرها هرمیتی نیستند ولی یکانی اند. رابطه جابجایی آنها به صورت زیر است:

$$ZX = \omega XZ. \quad (48)$$

عملگرهای $X^r Z^s$ که در آن $r, s = 0, 1, \dots, d-1$ یک پایه از عملگرهای یکانی برای فضای هیلبرت یک کیودیت می سازند.

■ **تمرین:** رابطه جابجایی $X^r Z^s$ را با $X^a Z^b$ پیدا کنید.

■ **تمرین:** ویژه بردارهای عملگرهای X و Z را پیدا کنید.

■ **تمرین:** ویژه بردارهای عملگر $X^a Z^b$ را برای وقتی که a, b دو عدد صحیح هستند بدست آورید.

■ **تمرین:** عملگر هادامارد را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j=0}^{d-1} \omega^{ij} |i\rangle\langle j|. \quad (49)$$

نشان دهید که این عملگر ویژه بردارهای Z را به ویژه بردارهای X تبدیل می کند. هم چنین نشان دهید که توان چهارم این عملگر برابر با عملگر واحد است یعنی $H^4 = I$.

■ **تمرین:** حالت های بل را در بعد دلخواه تعریف کنید. این حالت ها می بایست دارای خاصیت های زیر باشند:

الف: یک پایه برای فضای دو کیودیت باشند،

ب: همه آنها درهم تنیدگی ماکزیمال داشته باشند به این معنا که برای تمام آنها ماتریس چگالی کاهش یافته هر کدام از کیودیت ها متناسب با عملگر واحد باشد.

■ **تمرین:** عملگر تعمیم یافته $CNOT$ را به شکل زیر تعریف کنید:

$$CNOT|i, j\rangle = |i, i + j, \text{ mod } d\rangle.$$

با استفاده از این عملگر و عملگر هادامارد مداری کوانتومی بسازید که حالت های ضربی را به حالت های بل تبدیل کند.

۵ حالت های فوتونی

یکی از راه های عملی کردن رایانش کوانتومی استفاده از اپتیک خطی و غیرخطی است. دست کم دو دلیل برای این امیدواری وجود دارد نخست اینکه تولید حالت های کوانتومی نور در آزمایشگاه ساده است و سابقه ای طولانی و موفق در اپتیک کوانتومی و اپتیک لیزر برای تولید و کنترل

چنین حالت هایی وجود دارد. دوم اینکه زمان وادوسی فوتون عملاً بی نهایت است. البته این زمان وادوسی خیلی بالا یک جنبه منفی نیز دارد و آن اینکه برهم کنش فوتون ها با یکدیگر بسیار ضعیف است و به همین دلیل به دشواری می توان گیت های دو فوتونی عمومی روی فوتون ها ساخت. با این وجود استفاده از حالت های نور همچنان یک کاندیدای مهم برای رایانش کوانتومی باقی خواهد ماند. به همین دلیل شایسته است که آشنایی مختصری با حالت های کوانتومی نور پیدا کنیم. خوشبختانه در درسهای مقدماتی مکانیک کوانتومی این آشنایی را تا حدود زیادی پیدا کرده ایم و تنها کافی است که کمی یافته های خود را با آنچه که در مورد فوتون ها باید بدانیم تطبیق دهیم.

تصویر جدیدی که از نور داریم، یعنی تصویری که بعد از ابداع مکانیک کوانتومی پدیدار شده و با آزمایشها سازگار است، نور را به صورت بارانی از فوتون ها نشان می دهد. در بسیاری از شرایط شدت این بارش انقدر زیاد است که ما متوجه نمی شویم با بارانی از ذرات منفرد به نام فوتون سر و کار داریم. در چنین شرایطی تنها کافی است که خاصیت های ماکروسکوپی این بارش فوتونی را توصیف کنیم. خوب است که واقعا به مثال ذرات باران در زندگی روزمره فکر کنیم اگر بارش باران بسیار شدید باشد ما متوجه نمی شویم که باران از قطرات بسیار زیاد تشکیل شده و برای توصیف باران می توانیم تنها به خاصیت جریان ماکروسکوپی آب پردازیم؛ این که در هر لحظه از زمان چه مقدار آب از واحد سطح در واحد زمان (بر حسب کیلوگرم بر سانتی متر مربع بر ثانیه) می گذرد؟ آیا بارش در خط راست است یا این که پیچ و تاب دارد؟ آیا چشمه و چاهکی دارد یا اینکه مقدار آب ثابت است؟ این خاصیت ها را می توان به صورت معادلات دیفرانسیلی نوشت که ناظر بر این خاصیت ها و چگونگی تحول آنها در زمان و مکان است. اما اگر بارش باران بسیار رقیق باشد، آنگاه ما متوجه دانه دانه بودن آن و اینکه از قطرات آب تشکیل شده می شویم. در این شرایط می توانیم در باره خصوصیات قطره های آب حرف بزنیم؛ هر قطره چقدر وزن دارد؟ چقدر تکانه دارد یا با چه سرعتی حرکت می کند؟ چه تعداد قطره در واحد زمان از واحد سطح عبور می کنند؟ و نظایر آن. البته اگر از خواص جمعی و متوسط رفتار فوتون ها را در نظر بگیریم آنها با همان معادلات دیفرانسیلی که گفتیم توصیف می شوند. وضعیت نور نیز درست به همین گونه است. نور در بعضی از شرایط با معادلات ماکسول توصیف می شود ولی در بعضی شرایط دیگر، وقتی که بارش نور واقعا رقیق است، به صورت کوانتومی توصیف می شود. در چنین شرایطی کافی است که بگوییم که چه تعداد فوتون با چه تکانه هایی و چه قطبش هایی داریم تا حالت نور مشخص شود. بنابراین یک حالت کلی از نور به صورت زیر توصیف می شود:

$$|n(k_1, \epsilon_1), n(k_2, \epsilon_2), \dots, n(k_r, \epsilon_r), \dots\rangle \quad (50)$$

که به این معناست که این حالت (یعنی حالت نوری که مثلا در یک کاواک الکترومغناطیسی یا هر جای دیگر قرار دارد) چه تعداد فوتون با تکانه k_i و قطبش

$$\epsilon_i$$

وجود دارد. دقت کنید که تکانه k_i یک بردار سه بعدی است که جهت حرکت فوتون و فرکانس آن را از طریق رابطه $\omega_i = |k_i|$ تعیین می‌کند و ϵ_i نیز یک بردار دوبعدی مختلط عمود بر این بردار سه بعدی است که جهت قطبش آن را نشان می‌دهد. به عنوان مثال اگر جهت حرکت فوتون در راستای مثبت z باشد، آنگاه بردارهای قطبش می‌توانند به صورت زیر باشند:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: |x\rangle \quad \text{Polarization in the } x - \text{direction}, \quad (51)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: |y\rangle \quad \text{Polarization in the } y - \text{direction}, \quad (52)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} =: \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \quad \text{circular(left-handed polarization), etc.} \quad (53)$$

نوع فوتون با فرکانس و قطبش آن مشخص می‌شود و به آن یک مود^۳ می‌گوییم. اگر توجه خود را تنها به یک مود معطوف کنیم حالت‌های یک مود با یک عدد صحیح مشخص می‌شود یعنی اینکه چه تعداد فوتون با این مشخصات داریم. در نگاه اول این حالت‌ها شبیه به حالت‌های یک کیودیت هستند با این تفاوت که d برای آنها بی‌نهایت است ولی خواهیم دید که از نظر فیزیکی این حالت‌ها معنای کاملاً متفاوتی دارند. بهتر است که نخست توجه خود را به خواص فیزیکی این حالت‌ها معطوف کنیم. در پایان به بررسی خواص فیزیکی آنها نیز خواهیم پرداخت. بنابراین نقطه شروع ما این خواهد بود که یک فضای هیلبرت داریم با پایه بهنجار زیر

$$B = \{|0\rangle, |1\rangle, \dots |n\rangle, |n+1\rangle, \dots\} \quad (54)$$

در این فضا می‌توان عملگرهای زیر را تعریف کرد:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (55)$$

mode^۳

■ تمرین: نشان دهید که این دو عملگر واقعا الحاقی یکدیگر هستند. سپس نشان دهید که $[a, a^\dagger] = 1$.

و بالاخره نشان دهید که اگر عملگر شمارش را به صورت زیر تعریف کنیم: $N|n\rangle = n|n\rangle$ ، آنگاه

$$aa^\dagger = N + 1, \quad a^\dagger a = N.$$

عملگرهای a و a^\dagger که به آن ها عملگرهای فنا و خلق فوتون می گوئیم، عملگرهای هرمیتی نیستند. می توان عملگرهای هرمیتی زیر را تعریف کرد:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad p = \frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger), \quad (56)$$

این عملگرها در رابطه $[x, p] = i$ صدق می کنند که نشان دهنده یک رابطه عدم قطعیت بین مقادیر این دو کمیت است. این دو کمیت به ترتیب به شدت میدان الکتریکی نور و فاز آن مرتبط هستند.

یک حالت دلخواه نور (مثلا درون کاواک) به صورت

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n |n\rangle \quad (57)$$

توصیف می شود. در ادامه به توصیف بعضی از حالت های مهم فوتونی می پردازیم. این حالت ها نه تنها از نظر فیزیکی و تولید آزمایشگاهی اهمیت دارند بلکه از نظر ریاضی و از نظر کاربرد در نظریه اطلاعات کوانتومی نیز مهم هستند.

ی

۱.۵ حالت های همدوس

از نظر فیزیکی حالت های پایه $|n\rangle$ و $|x\rangle$ ، هرکدام معنای فیزیکی خاصی دارند. پایه دیگری که معنای فیزیکی خیلی جالبی دارد پایه حالت های همدوس است. این حالت ها به ترتیبی که خواهیم دید، نزدیک ترین حالت ها به حالت های کلاسیک هستند. بهترین تعریف برای این حالت ها به صورت زیر است. عملگر \hat{a} را در نظر بگیرید. این عملگر یک عملگر هرمیتی نیست بنابراین اگر ویژه مقداری داشته باشد حتما یک عدد مختلط است. این ویژه مقدار را با عدد مختلط z و ویژه بردار مربوطه را با $|z\rangle$ نشان دهید. بنابراین داریم

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle. \quad (58)$$

■ **تمرین:** نشان دهید که این حالت را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$|z\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (59)$$

عدد N را چنان انتخاب کنید که حالت فوق بهنجار باشد.

■ **تمرین:** نشان دهید که حالت بهنجار همدوس را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|z\rangle = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}} |0\rangle \quad (60)$$

عملگر $D(z, z^*) := e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}$ عملگر جابجایی نامیده می شود.

■ **تمرین:** نشان دهید که رابطه زیر برقرار است:

$$D(z, z^*)D(w, w^*) = AD(z + z^*, w + w^*), \quad (61)$$

که در آن A یک عدد مختلط و تابعی از z و w است. این عدد را محاسبه کنید.

■ **تمرین:** در یک حالت همدوس احتمال این را که تعداد فوتون ها برابر با n باشد را حساب کنید. تعبیر این احتمال چیست؟

■ **تمرین:** نشان دهید که برای هر حالت همدوس میزان عدم قطعیت هایزنبرگ مساوی با مقدار کمینه یعنی $\frac{\hbar}{2}$ است. البته در دستگاه

واحدهایی که به کار برده ایم مقدار \hbar برابر با یک است.

■ **تمرین:** نشان دهید که رابطه تمامیت زیر برقرار است:

$$\frac{1}{\pi} \int dz dz^* |z\rangle \langle z| = I. \quad (62)$$

■ **تمرین:** مشاهده پذیر های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\hat{x}' &:= \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{p}, \\ \hat{p}' &:= -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{p}.\end{aligned}\quad (۶۳)$$

نشان دهید که برای این مشاهده پذیرها نیز میزان عدم قطعیت هایزنبرگ مساوی با مقدار کمینه یعنی $\frac{\hbar}{2}$ است. بنابراین می توان یک حالت همدوس را با کمی تسامح به صورت نشان داده شده در شکل ?? نشان داد.

یک حالت مخلوط فوتون تک مد را می توان به صورت کلی به صورت زیر نشان داد

$$\rho = \sum_{n,m} \rho_{n,m} |n\rangle \langle m|, \quad (۶۴)$$

و یا

$$\rho = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 z d^2 w \rho(z, w) |z\rangle \langle w|. \quad (۶۵)$$

۲.۵ حالت های فشرده

حالت های فشرده حالت هایی هستند که در آنها عدم قطعیت دریکی از مختصه ها مثلا در مکان کم شده و در مختصه دیگر مثلا در تکانه زیاد شده است به نحوی که بازهم حاصل ضرب عدم یقین در دو مختصه مقدار کمینه $\frac{\hbar}{2}$ باقی مانده است. چنین حالت هایی را برای نور و فوتون ها می توان براحتی در آزمایشگاه ساخت. از نظر ریاضی این حالت ها با اثر یک عملگر فشارنده *Squeezing Operator* روی حالت همدوس بدست می آیند. یک عملگر فشارنده برای یک مود به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(\xi) := e^{\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2}}, \quad (۶۶)$$

که در آن $\xi := r e^{i\phi}$ یک عدد مختلط است. بنابراین یک حالت فشرده به صورت زیر است:

$$|z, \xi\rangle := S(\xi)|z\rangle, \quad (۶۷)$$

که در آن $|z\rangle$ یک حالت همدوس است.

■ **تمرین:** نشان دهید که

$$e^{iN\phi} a e^{-i\phi N} = e^{-i\phi} a, \quad e^{iN\phi} a^\dagger e^{-i\phi N} = e^{i\phi} a^\dagger \quad (۶۸)$$

با استفاده از این رابطه نشان دهید که عملگر فشارنده با پارامتر ξ با پارامتر مختلط $\xi = r^{i\phi}$ را می توان با یک تبدیل یکانی از عملگر فشارنده با پارامتر حقیقی r بدست آورد.

■ **تمرین:**

با استفاده از لم بیکر - هاسدورف نشان دهید که

$$S(r)aS(-r) = \cosh ra + \sinh ra^\dagger, \quad S(r)a^\dagger S(-r) = \sinh ra + \cosh ra^\dagger. \quad (۶۹)$$

■ **تمرین:** با استفاده از تمرین قبلی عدم یقین Δx و Δp را برای یک حالت فشرده ی $|z, r\rangle$ حساب کنید. نشان دهید که نسبت یه یک حالت همدوس، اگرچه عدم یقین در یکی از این مشاهده پذیرها افزایش و در دیگری کاهش یافته ولی هم چنان حاصلضرب آنها مقدار ثابت $\frac{\hbar}{2}$ است.

■ **تمرین:** حال عدم یقین را برای یک حالت فشرده دلخواه مثل $|z, \xi\rangle$ بدست آورید.

■ **تمرین:** بسط یک حالت فشرده دلخواه را برحسب حالت های پایه $|n\rangle$ بدست آورید.

۳.۵ تابع مشخصه

بسط یک حالت برحسب بردارهای پایه آنچنانکه در روابط (۳.۴۰-۳.۴۱) نوشته شده است اگرچه کاملترین توصیف از یک حالت است ولی برای بسیاری اوقات به چنین توصیف کاملی نه نیاز داریم و نه به آن دسترسی داریم. معمولاً می خواهیم از یک حالت کوانتومی متوسط مشاهده پذیرها

را بدست آوریم. معمولاً می‌خواهیم متوسط عملگرهایی مثل $a^m a^{\dagger n}$ را که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند بدست آوریم. بجای آنکه هر بار چنین متوسط‌هایی را حساب کنیم یک بار برای همیشه تابع مولدی را حساب می‌کنیم که چنین متوسط‌هایی را در دل خود دارد. به چنین تابع مولدی تابع مشخصه یا *Characteristic Function* مربوط به آن حالت کوانتومی می‌گوییم. این تابع مشخصه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi(z, z^*) := \langle D(z, z^*) \rangle = \text{tr}(D(z, z^*)\rho) = \text{tr}(e^{z a^\dagger - z^* a} \rho). \quad (70)$$

■ **تمرین:** تابع مشخصه‌ی یک حالت همدوس را بدست آورید. از روی آن متوسط کمیت‌های X , P , X^2 , P^2 را بدست آورید.

■ **تمرین:** تمرین قبلی را برای یک حالت فشرده‌ی $|z, \xi\rangle$ تکرار کنید.

■ **تمرین:** تمرین قبلی را برای حالت پایه نوسانگر هارمونیک یعنی $|0\rangle$ تکرار کنید.

تعریف: یک حالت ρ یک حالت گاوسی خوانده می‌شود هرگاه تابع مشخصه‌ی آن یک تابع گاوسی باشد. کلی‌ترین مشاهده پذیر تابع دلخواهی است از مشاهده پذیرهای $\langle \hat{x} \rangle$ و $\langle \hat{p} \rangle$ و با تابع دلخواهی از عملگرهای \hat{a} و \hat{a}^\dagger .

۴.۵ گیت‌های پیوسته

به هر عملگر یکانی که روی فضای هیلبرت یک نوسانگر هارمونیک عمل می‌کند یک گیت پیوسته می‌گوییم. بنابراین اگر $H(a, a^\dagger)$ یک تابع دلخواه از عملگرهای a و a^\dagger باشد به نحوی که H هرمیتی باشد، آنگاه e^{iH} یک گیت پیوسته تک کیوبیتی است. ساده‌ترین این گیت‌ها گیت‌هایی هستند که در آن‌ها H یک تابع درجه دو از a و a^\dagger است.

۶ تجزیه اشمیت

رابطه 11 کلی ترین حالت یک سیستم کوانتومی مرکب را نشان می دهد. این حالت برحسب NM تا بردار پایه $|i, \mu\rangle$ بسط داده شده است. با این وجود می توان نشان داد که این بردار حالت را به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} |\alpha\rangle |\tilde{\alpha}\rangle. \quad (71)$$

که در آن $|\alpha\rangle$ ها و $|\tilde{\alpha}\rangle$ ها بردارهای متعامد یکه هستند، λ_{α} ها اعداد مثبت و $n \leq \min(M, N)$. این تجزیه، تجزیه اشمیت خوانده می شود و دارای کاربردهای بسیار مفید و مهم است. به دو روش می توان وجود این تجزیه را ثابت کرد.

روش اول: ماتریس Ψ با درایه های $\Psi_{i\mu} = \psi_{i,\mu}$ را در نظر بگیرید. بنابر قضیه تجزیه مقدار منفرد می توان نوشت

$$\Psi = UDV \quad (72)$$

که در آن U و V ماتریس های یکانی و D یک ماتریس مستطیلی قطری با درایه های مثبت است.

به عبارت دیگر

$$\psi_{i\mu} = \sum_{\alpha=1}^n U_{i,\alpha} \lambda_{\alpha} V_{\alpha,\mu} \quad (73)$$

که در آن n تعداد مقادیر منفرد غیر صفر از Ψ است. دقت کنید که $n \leq \min(M, N)$. با جایگذاری این مقدار در حالت اولیه بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{i,\mu,\alpha} U_{i,\alpha} \lambda_{\alpha} V_{\alpha,\mu} |i, \mu\rangle = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \left(\sum_i U_{i\alpha} |i\rangle \right) \left(\sum_{\mu} V_{\alpha\mu} |\mu\rangle \right) \\ &=: \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} |\alpha\rangle |\tilde{\alpha}\rangle, \end{aligned} \quad (74)$$

که در آن

$$|\alpha\rangle := \sum_i U_{i\alpha} |i\rangle, \quad |\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{\mu} V_{\alpha\mu} |\mu\rangle. \quad (75)$$

یکانی بودن ماتریس های U و V این نتیجه را می دهد که بردارهای فوق، بردارهای متعامد یکه برای فضاهاى هیلبرت سیستم های A و B خواهند بود، یعنی

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta}, \quad \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\beta} \rangle = \delta_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}. \quad (76)$$

■ تمرین: با استفاده از این روش تجزیه اشمیت حالت $|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0,0\rangle + |1,1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}|0,+\rangle$ را بدست آورید.

■ تمرین: حالت زیر را که در فضای $C^2 \otimes C^3$ تعریف شده است در نظر بگیرید.

$$|\psi\rangle = A(|0,0\rangle + |1,1\rangle + |1,2\rangle + |+,1\rangle).$$

ضرب A را چنان حساب کنید که این حالت بهنجار باشد. سپس تجزیه اشمیت این حالت را پیدا کنید.

روش دوم: در این روش از تجزیه مقدار منفرد استفاده نمی کنیم بلکه برای فضای هیلبرت H_A پایه ای انتخاب می کنیم که در آن ماتریس ρ_A قطری باشد. این پایه را با $\{|\alpha\rangle\}$ نشان می دهیم. در نتیجه بردار حالت به شکل زیر نوشته می شود:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle |\phi_{\alpha}\rangle \quad (77)$$

که در آن بردارهای $\{|\phi_{\alpha}\rangle\}$ بردارهایی نه الزاماً متعامد و یا یکه در فضای هیلبرت H_B هستند. حال دقت می کنیم که بنابر تعریف :

$$\rho_A = \text{tr}_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) = \sum_{\alpha, \beta} |\alpha\rangle\langle\beta| \langle\phi_{\alpha}|\phi_{\beta}\rangle. \quad (78)$$

اما چون ماتریس چگالی ρ_A در پایه انتخاب شده قطری است پس بدست می آوریم که :

$$\langle\phi_{\alpha}|\phi_{\beta}\rangle = \lambda_{\alpha}^2 \delta_{\alpha, \beta} \quad (79)$$

با تعریف $|\phi_{\alpha}\rangle = \lambda_{\alpha} |\hat{\alpha}\rangle$ به تجزیه اشمیت یعنی رابطه (71) می رسم. یکی از نتایج تجزیه اشمیت این است که هر دو ماتریس چگالی ρ_A و ρ_B ویژه مقدارهای غیر صفر یکسان دارند، زیرا

$$\rho_A = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2 |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad \rho_B = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2 |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}|. \quad (80)$$

دقت کنید که تجزیه اشمیت فقط برای حالت های دو قسمتی ^۴ برقرار است و برای یک سیستم سه قسمتی ^۵ یا چند قسمتی ^۶ چنین تجزیه ای وجود ندارد.

■ تمرین: تجزیه اشمیت بردارهایی را که در با روش قبلی پیدا کردید با این روش پیدا کنید.

۱.۶ درهم تنیدگی و تجزیه اشمیت

یکی از مهمترین ویژگی های مکانیک کوانتومی وجود حالت های درهم تنیده ^۷ است که در درس های آینده به تفصیل در باره آن سخن خواهیم گفت. اطلاعات ما در مورد درهم تنیدگی حالت های خالص خیلی بیشتر از درهم تنیدگی حالت های آمیخته است. یک حالت خالص درهم تنیده از یک سیستم دو قسمتی، حالتی است که نتوان آن را به صورت حاصل ضرب تانسوری حالت هایی از تک سیستم ها نوشت. بنابراین حالتی مثل $|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A |\psi\rangle_B$ یک حالت درهم تنیده نیست. چنین حالتی را یک حالت ضربی ^۸ می نامیم. حالتی که عدد اشمیت آن بزرگتر از یک باشد، یک حالت درهم تنیده است. در یک حالت درهم ناتنیده ^۹ حالت هرکدام از زیر سیستم های A و B یک حالت خالص است ولی در یک حالت درهم تنیده چنین نیست. فرض کنید که یک حالت درهم تنیده در دست آلیس و باب است که تنها می توانند اعمال یکانی موضعی ^{۱۰} روی زیرسیستم های خود انجام دهند. آیا با این اعمال آلیس و باب می توانند درهم تنیدگی حالت خود را از بین ببرند؟ پاسخ این سوال منفی است زیرا با این گونه اعمال آنها نمی توانند عدد اشمیت حالت خود را تغییر دهند. فرض کنید که عدد اشمیت یک حالت $|\psi\rangle_{AB}$ برابر با k باشد. این امر به این معناست که

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^k |i\rangle |\bar{i}\rangle, \quad (۸۱)$$

Bi-partite^۴

tri-partite^۵

Multi-partite^۶

Entangled^۷

Product State^۸

disentangled^۹

Local unitary^{۱۰}

که در آن $\{|i\rangle\}$ ها و $\{|\tilde{i}\rangle\}$ ها دو دسته حالت های متعامد هستند. (دقت کنید که ضرایب $\sqrt{\lambda_i}$ را در حالت ها جذب کرده ایم و بنابراین حالت های فوق دیگر یکه نیستند.) حال اعمال یکانی روی حالت $|\psi\rangle_{AB}$ ، حالت

$$|\psi'\rangle_{AB} = U_A \otimes U_B |\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^k (U_A |i\rangle)(U_B |\tilde{i}\rangle) = \sum_{i=1}^k |i'\rangle |\tilde{i}'\rangle, \quad (82)$$

که باز هم همان عدد اشمیت را دارد.

همانطور که در ابتدا گفتیم درهم تنیدگی حالت های آمیخته پیچیده تر از حالت های خالص است. آنچه که می دانیم این است که اگر حالت دو سیستم A و B به صورت

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B \quad (83)$$

زیر باشد، این دو حالت در هم تنیده نیستند. در درسهای آینده خواهیم دید که حتی اگر حالت ρ_{AB} به صورت زیر باشد

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)}, \quad \sum_i p_i = 1. \quad (84)$$

این دو حالت درهم تنیدگی ندارند. چنین حالت هایی را حالت های جدایی پذیر^{۱۱} می گوئیم.

■ تمرین: نشان دهید که هرگاه دو حالت جدایی پذیر باشند، می توانیم آن ها را به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$\rho_{AB} = \sum_{a,b} P_{a,b} |a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b|, \quad \sum_{a,b} P_{a,b} = 1, \quad (85)$$

یعنی چنین حالتی به صورت ترکیبی محدبی از حالت های ضربی نوشته می شود.

^{۱۱} Seperable

۷ خالص سازی - Purification

فرض کنید که دستگاه A توسط یک ماتریس چگالی ρ توصیف می شود. آیا می توان دستگاهی مثل B و حالتی از دستگاه مرکب AB مثل $|\psi\rangle_{AB}$ چنان یافت که :

$$\rho = \text{tr}_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) \quad (۸۶)$$

باشد. اگر چنین حالتی پیدا کنیم حالت $|\psi\rangle_{AB}$ را حالت خالص شده ماتریس چگالی ρ می خوانیم. برای اینکه خالص شده یک ماتریس چگالی ρ_A باویژه مقدارهای p_i را پیدا کنیم به ترتیب زیر عمل می کنیم. دستگاه B را دستگاهی می گیریم که بعد فضای هیلبرت آن یعنی H_B حداقل با بعد H_A یکی باشد. هرگاه بردارهای $\{|i\rangle\}$ یک پایه متعامد برای دستگاه A باشند قرار می دهیم:

$$\psi_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i} |i, \hat{i}\rangle \quad (۸۷)$$

که در آن $\{|\hat{i}\rangle\}$ یک مجموعه بردار متعامدیکه برای فضای H_B هستند. در این صورت $|\psi\rangle_{AB}$ یک خالص سازی ρ_A است. دقت کنید که برای حالت های چند بعدی فضای ماتریس های چگالی شکل ساده ای ندارد. خواننده می تواند این موضوع را برای خود برای حالت های سه بعدی تحقیق کند. در واقع برای حالت های n بعدی می دانیم که مولفه های جبر $su(n)$ که آنها را با $T_1, T_2, \dots, T_{n^2-1}$ نشان می دهیم، یک پایه برای فضای ماتریس های هرمیتی و بدون رد تشکیل می دهند. بنابراین یک ماتریس چگالی بسطی برحسب این ماتریس ها به شکل زیر دارد:

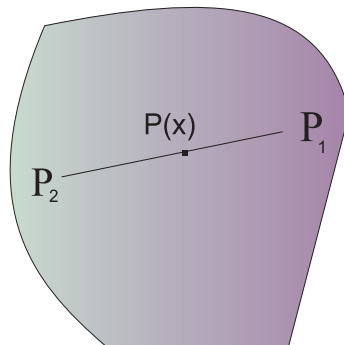
$$\rho_A = \frac{1}{d} \left(I + \sum_{i=1}^{n^2-1} \alpha_i T_i \right). \quad (۸۸)$$

ولی آنچه که دشوار است این است که به ازای چه مقادیری از ضرایب بسط یعنی α_i ها، ویژه مقدارهای این ماتریس ها مثبت هستند.

■ تمرین: ماتریس $\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & x \\ x & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید که در آن x یک عدد حقیقی است.

الف: محدوده x را چنان تعیین کنید که ρ یک ماتریس چگالی باشد.

ب: یک خالص سازی از ρ بدست آورید.



شکل ۳: ماتریس های چگالی یک زیر مجموعه محدب از مجموعه تمام ماتریس های هرمیتی را تشکیل می دهند. مطابق شکل می توان هر ماتریس چگالی را به انواع مختلف به صورت جمع محدبی از ماتریس های چگالی دیگر نوشت. به عنوان $\rho(x) = x\rho_1 + (1-x)\rho_2$. نقاطی که نتوان آنها را به صورت مجموع محدب نقاط دیگر نوشت، نقاط اکسترمال نامیده می شوند. نقاط روی مرز ماتریس هایی هستند که یکی یا بیشتر از ویژه مقدارهای آنها برابر با صفر است.

۸ نکاتی در مورد توپولوژی مجموعه ماتریس های چگالی

می دانیم که ماتریس چگالی، ماتریسی است که دارای سه خاصیت هرمیتی بودن، مثبت بودن و رد واحد داشتن است. حال اگر ρ_1 و ρ_2 دو ماتریس چگالی باشند، نتیجه می گیریم که ماتریس

$$\rho(\lambda) = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2, \quad (۸۹)$$

که در آن $0 \leq \lambda \leq 1$ ، نیز یک ماتریس چگالی است زیرا هر سه خاصیت گفته شده در بالا را دارد. این موضوع نشان می دهد که مجموعه ماتریس های چگالی در فضای ماتریس های هرمیتی یک زیر مجموعه محدب را تشکیل می دهد زیرا خط واصل بین هر دو نقطه در این زیر مجموعه به تمامی داخل این مجموعه است، شکل ۸. در نظریه اطلاعات کلاسیک و کوانتومی استدلال های ناشی از تحدب نقش بسیار مهمی را ایفا می کنند. در این جا ما با نخستین ویژگی از این نوع آشنا شده ایم.

تعریف: در یک زیر مجموعه محدب C از یک فضای برداری، یک نقطه، نقطه اکسترمال خوانده می شود اگر نتوان آن را به صورت مجموع محدب دو نقطه از C نوشت.

قضیه: در فضای ماتریس های چگالی یک نقطه، نقطه اکسترمال است اگر و فقط اگر آن نقطه یک حالت خالص باشد.

اثبات: نخست فرض کنید که ρ یک نقطه اکستریمال باشد. تجزیه طیفی ρ را می نویسیم که بر مبنای آن داریم $\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$. از آنجا که گفته شده است ρ یک نقطه اکستریمال است، این امر به این معناست که یکی از λ ها برابر با 1 و بقیه برابر با صفرند. اما این چیزی نیست جز بیان خالص بودن حالت ρ .

بر عکس، ρ را یک حالت خالص مثل $|\psi\rangle\langle\psi|$ بگیرید. نشان می دهیم که نمی توان این حالت را به صورت مجموع محدب دو ماتریس چگالی دیگر نوشت و به همین معنا واقعاً این حالت یک حالت خالص است. از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنید که بتوان نوشت

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2. \quad (90)$$

حال برداری مثل $|\psi^\perp\rangle$ در نظر بگیرید. داریم

$$0 = \langle\psi^\perp|\psi\rangle\langle\psi|\psi^\perp\rangle = \lambda\langle\psi^\perp|\rho_1|\psi^\perp\rangle + (1 - \lambda)\langle\psi^\perp|\rho_2|\psi^\perp\rangle. \quad (91)$$

از آنجا که ماتریس های ρ_1 و ρ_2 هر دو مثبت هستند، طرف راست تنها وقتی می تواند برابر با صفر باشد که یا $\lambda = 0$ یا $\lambda = 1$ و یا

$$\langle\psi^\perp|\rho_1|\psi^\perp\rangle = \langle\psi^\perp|\rho_2|\psi^\perp\rangle = 0. \quad (92)$$

در دو حالت اول مقصود حاصل شده است یعنی حالت ρ جمع محدب نشده است. در حالت اخیر، از آنجا که این تساوی ها برای هر بردار $|\psi^\perp\rangle$ که بر $|\psi\rangle$ عمود است می بایست برقرار باشند نتیجه می گیریم که $\rho_1 = \rho_2 = |\psi\rangle\langle\psi|$ که بازهم به معنای آن است که ρ به صورت یک جمع محدب نوشته نشده است.

حال به مرز مجموعه ماتریس های چگالی نگاه می کنیم. این مرز جایی است که یکی یا بیشتر از ویژه مقادیرهای ماتریس چگالی صفر می شود، زیرا بیرون از این مرز، جایی است که ماتریس های هرمیتی ولی منفی قرار گرفته اند. در این جا یک تفاوت مهم ماتریس های چگالی دو بعدی با ماتریس های چگالی با بعد بیشتر از ۲ آشکار می شود. در دو بعد نقاط روی مرز یکی از ویژه مقادیرهایشان برابر با صفر و در نتیجه تنها ویژه مقدار دیگرشان حتماً برابر با ۱ است. این امر به این معناست که همه ماتریس های چگالی روی مرز در دو بعد، حالت های خالص هستند. این خاصیت را قبلاً در کره بلوخ دیده ایم. در واقع در این کره تمام نقاط روی مرز نقاط اکستریمال هستند و این خاصیت مختص دو بعد است به عنوان مثال در سه بعد یک ماتریس چگالی که تجزیه طیفی آن برابر با $\rho = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|)$ است، روی مرز قرار دارد ولی یک حالت خالص نیست.

۹ تجزیه یک ماتریس چگالی به آنزامل های مختلف

از آنجا که یک حالت مخلوط با یک ماتریس هرمیتی داده می شود، می توانیم آن را قطری کنیم یا به اصطلاح تجزیه طیفی آن را بدست آوریم. در نتیجه می توان نوشت

$$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i |i\rangle \langle i|, \quad (93)$$

که در آن λ_i ها ویژه مقدارهای ρ و $|i\rangle$ ها ویژه بردارهای آن هستند. در اینجا n بعد فضای هیلبرت یا بعد ماتریس ρ است. هرگاه چنین کنیم می توانیم برای هر مشاهده پذیر M بنویسیم

$$\langle M \rangle = \text{tr}(M\rho) = \text{tr}\left(M \sum_{i=1}^n \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle i|M|i\rangle. \quad (94)$$

عبارت بالا را می توان به این ترتیب تفسیر کرد که حالت ρ مخلوطی از حالت های $|i\rangle$ هرکدام با درصد λ_i است و به همین مناسبت متوسط مشاهده پذیری مثل M در دو مرحله حساب شده است: نخست یک متوسط کلاسیک روی حالت های $|i\rangle$ که هرکدام با وزن λ_i در این جمع آورده شده اند و سپس یک متوسط کوانتومی روی هر حالت $|i\rangle$. این محاسبه وجه نامگذاری حالت مخلوط را نیز روشن می کند. در بسیاری اوقات ما نمی دانیم که سیستم ما دقیقاً در چه حالتی است بلکه می دانیم که مخلوطی است از حالت های متعامد با وزن های مشخص. مهمترین مثال از این نوع در مکانیک آماری پدیدار می شود. وقتی که یک سیستم در دمای T به تعادل رسیده باشد، بنابر اصل موضوع بولتزمن می دانیم که با احتمال $P_i := \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$ در ویژه حالت هامیلتونی یعنی $|i\rangle$ با انرژی E_i است. بنابراین چنین سیستمی با یک ماتریس چگالی توصیف می شود که عبارت است از:

$$\rho = \sum_i \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} |i\rangle \langle i| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} |i\rangle \langle i| = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}. \quad (95)$$

در این عبارت Z تابع پارش خوانده می شود و برابر است با:

$$Z = \sum_{i=1}^n e^{-\beta E_i} = \text{tr}(e^{-\beta H}). \quad (96)$$

باید توجه داشت که تجزیه 93 تنها یکی از انواع تجزیه هاست. هم از نظر تجربی و هم نظری می توان تجزیه های گوناگونی از یک حالت تصور کرد. تجزیه طیفی؟؟ فقط از این نظر منحصر به فرد است که در آن ویژه بردارهای ρ بکار رفته است وگرنه می توان بی نهایت تجزیه برای یک ماتریس چگالی نوشت. یعنی می توان نوشت

$$\rho = \sum_{j=1}^N |\psi_j\rangle \langle \psi_j|, \quad (97)$$

که در آن اولاً N هیچ ربطی به بعد فضای هیلبرت یا همان بعد ρ ندارد و ثانیاً حالت های $|\psi_j\rangle$ لزوماً برهم عمود نیستند. این نوع تجزیه نیز یک آزمایش از همان ماتریس چگالی را توصیف می کند. بنابراین برای یک نوع ماتریس چگالی می توان انواع تجزیه ها و در نتیجه انواع تفسیرهای آزمایشی را به کار برد. در واقع به بی نهایت طریق می توان یک ماتریس چگالی را به ماتریس های چگالی دیگر و یا به حالت های خالص تجزیه کرد.

برای درک این نکته که بی نهایت تجزیه برای یک حالت مخلوط امکان پذیر است بازهم کره بلوخ را در نظر بگیرید. چگونه می توان یک حالت مخلوط برای یک ذره اسپین یک دوم را تجزیه کرد؟ این تجزیه چگونه روی کره بلوخ نشان داده می شود؟ پاسخ این سوال ساده است. فرض کنید که یک حالت مخلوط متناظر با بردار \mathbf{r} روی کره بلوخ داده شده است. می خواهیم این حالت را به صورت مجموع دو حالت خالص تجزیه کنیم. برای این کار از نوک بردار \mathbf{r} و تری از کره را رسم می کنیم که سطح کره را در دو نقطه \mathbf{n}_1 و \mathbf{n}_2 قطع کند. هرگاه طول دو پاره خط نشان داده شده در شکل را با l_1 و l_2 نشان دهیم آنگاه یک محاسبه ساده نشان می دهد که می توان حالت مخلوط $\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \sigma)$ را به شکل زیر تجزیه کرد:

$$\rho = p_1 |n_1\rangle \langle n_1| + p_2 |n_2\rangle \langle n_2| \quad (98)$$

که در آن $p_1 = \frac{l_1}{l_1+l_2}$ و $p_2 = \frac{l_2}{l_1+l_2}$. از آنجا که وتر مربوطه را به بی نهایت طریق می توان رسم کرد، پس بی نهایت تجزیه دوتایی برای حالت مخلوط وجود دارد. آیا تجزیه های بیش از دو تایی هم وجود دارد؟ پاسخ این سوال هم مثبت است. فرض کنید که نقاط $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_N$ روی سطح کره داده شده اند. حال ضرایب p_1, p_2, \dots, p_N را چنان تعیین می کنیم که شرط زیر تحقق یابد:

$$\sum_{i=1}^N p_i \mathbf{n}_i = \mathbf{r} \quad (99)$$

در این صورت می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \sigma) = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{2}(I + \mathbf{n}_i \cdot \sigma) \\ &= \sum_{i=1}^N p_i |n_i\rangle \langle n_i| \end{aligned} \quad (100)$$

به این ترتیب حالت مخلوط ρ را می توان به بی نهایت طریق به صورت مجموعی از حالت های خالص و یا حتی به صورت انتگرالی از حالت های خالص تجزیه کرد که در حالت اخیر خواهیم نوشت:

$$\rho = \int d\phi d\cos\theta p(\theta, \phi) |n(\theta, \phi)\rangle \langle n(\theta, \phi)| \quad (101)$$

با این شرط که $\int d\phi d\cos\theta p(\theta, \phi) = 1$.

۱.۹ طرز تهیه آنزامل های مختلف

ماتریس چگالی $\rho_B = \frac{1}{2} I_B$ را در نظر بگیرید. این ماتریس توصیف کننده حالت ذراتی است که در درست باب هستند. می دانیم که این حالت به شکل های زیر قابل تجزیه است:

$$\rho_B = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \quad (۱۰۲)$$

و یا

$$\rho_B = \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|). \quad (۱۰۳)$$

در حالت اول ماتریس چگالی به مخلوطی یکنواخت از حالت های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ و در حالت دوم به مخلوطی یکنواخت از حالت های $|+\rangle$ ، $|-\rangle$ تجزیه شده است. مسلم است که هر دو این آنزامل ها یک ماتریس چگالی را نشان می دهند و با هیچ آزمایشی از یکدیگر قابل تشخیص نیستند.

■ تمرین: چرا این گزاره درست است؟ یعنی چرا نمی توان با هیچ آزمایشی این دو حالت را ازهم تشخیص داد؟ برای پاسخ به این سوال به یک استدلال ریاضی اکتفا نکنید بلکه خود را در مقام یک آزمایش گر تصور کنید و سعی کنید که راهی بیابید که این دو آنزامل را از هم تمیز بدهد.

حال سوال این است که این دو آنزامل چگونه تهیه می شوند. مسلما راه های متفاوتی برای تهیه این دو آنزامل وجود دارد. مثلا اگر با اسپین ها سروکار داریم برای تهیه آنزامل (۱۰۲) کافی است که یک دستگاه اشترن گرلاخ در راستای z اسپین ها را از هم جدا کند و سپس ما باریکه های خروجی ذرات را کمی منحرف کرده و در یک راستا قرار دهیم، شکل (؟؟). هرگاه که راستای میدان مغناطیسی دستگاه اشترن گرلاخ را بجای z در جهت x بگیریم، آنزامل (۱۰۳) تهیه خواهد شد، شکل (۱۰۳).

یک راه خیلی جالب دیگر این است. فرض کنید که حالت

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,0\rangle + |1,1\rangle)$$

بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده است. ماتریس چگالی آلیس و باب هردو برابر با $\frac{I}{2}$ است. حال فرض کنید که آلیس اسپین خود را در راستای z اندازه گیری کند. اگر او اسپین اش را در جهت 0 اندازه بگیرد، حالت دو ذره به $|0,0\rangle$ و در نتیجه حالت ذره در دست باب نیز به $|0\rangle$

کاهش پیدا می کند. این کار با احتمال $1/2$ اتفاق می افتد. با احتمال $1/2$ نیز حالت دست باب در اثر اندازه گیری الیس به $|1\rangle$ تقلیل پیدا می کند. بنابراین ذره در دست باب در حالت $|1\rangle$ است که با احتمال $1/2$ می تواند در هرکدام از حالت های خالص پیش گفته باشد یعنی

$$\rho_B = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|). \quad (104)$$

به این ترتیب آلیس با اندازه گیری خود در دوردست ها بدون اینکه با باب رابطه علی نیز داشته باشد این آنزامل را برای باب فراهم می کند. البته این ناقض نسبیت نیست چرا که ماتریس چگالی باب قبل و بعد از اندازه گیری هیچ گونه تغییری نمی کند. در واقع نتایج آزمایش های باب پیش و پس از اندازه گیری انجام شده توسط آلیس یکی است.

حال فرض کنید که آلیس اسپین خود را در راستای x اندازه گیری کند. حالت دوتایی ای که در دست آنهاست به صورت زیر نیز قابل نوشتن است:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,+\rangle + |-, -\rangle)$$

بنابراین اگر آلیس اسپین اش را در جهت $+$ پیدا کند، حالت دو ذره به $|+, +\rangle$ و در نتیجه حالت ذره در دست باب نیز به $|+\rangle$ کاهش پیدا می کند. این کار با احتمال $1/2$ اتفاق می افتد. با احتمال $1/2$ نیز حالت دست باب در اثر اندازه گیری الیس به $|-\rangle$ تقلیل پیدا می کند. بنابراین ذره در دست باب در حالت $|-\rangle$ است که با احتمال $1/2$ می تواند در هرکدام از حالت های خالص پیش گفته باشد یعنی

$$\rho_B = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|). \quad (105)$$

به این ترتیب آلیس با اندازه گیری خود در دوردست ها بدون اینکه با باب رابطه علی نیز داشته باشد این آنزامل را برای باب فراهم می کند. البته مثل حالت قبل نسبیت در این جا نیز نقض نمی شود.

■ تمرین: آیا باب هیچ راهی دارد که بتواند بفهمد آلیس آزمایش را در راستای z انجام داده یا در راستای x ؟ اگر چنین امکانی وجود داشته باشد آنگاه باب می تواند نوع آزمایش آلیس را به طور آنی بفهمد که این خود ناقض نسبیت خواهد بود.

■ تمرین: حالت زیر را در نظر بگیرید که بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده است:

$$|\Psi\rangle_{AB} = a|0,0\rangle + b|1,1\rangle. \quad (۱۰۶)$$

الف: ماتریس چگالی کیوبیتی که در دست باب است چیست؟

ب: آلیس روی کیوبیتی که در دست دارد در پایه $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ اندازه گیری انجام می دهد. بعد از اندازه گیری آلیس کیوبیت در دست باب به چه حالت هایی و با چه احتمالی تقلیل پیدا می کند. کیوبیتی که در دست باب است اکنون به صورت یک حالت مخلوط (یا یک تجزیه آنزاملی) است. این تجزیه و ماتریس چگالی مربوط به آن را پس از این اندازه گیری پیدا کنید.

پ: حال فرض کنید که آلیس در پایه زیر اندازه گیری می کند:

$$\{|\phi\rangle, |\phi^\perp\rangle\}$$

انجام می دهد که در آن

$$|\phi\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle, \quad |\phi^\perp\rangle = -\sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle.$$

سوال قسمت ب را برای این قسمت پاسخ دهید.

مثال: فرض کنید که بین آلیس و باب یک حالت به صورت

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle) \quad (۱۰۷)$$

به اشتراک گذاشته شده است. آیا آلیس می تواند برای این ماتریس چگالی یک تجزیه آنزاملی به صورت زیر تهیه کند؟

$$\rho_B = \frac{1}{4}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) \quad (۱۰۸)$$

راه حل اول: یک راه این است که آلیس کیوبیت های خودش را به صورت تصادفی و با احتمال مساوی در پایه های x و z اندازه گیری کند. در این صورت آنزامل بالا برای باب تهیه می شود.

راه دوم: برای اینکه راه حل دوم را بفهمیم به خالص سازی حالت ρ_B توجه می کنیم. حالت خالص شده ρ_B به شکل زیر است:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2} (|a_0, 0\rangle + |a_1, 1\rangle + |a_2, +\rangle + |a_3, -\rangle) \quad (109)$$

که در آن $|a_i\rangle$ ها چهارتا حالت متعامد هستند. اگر آلیس روی این چهار حالت اندازه گیری متعامد انجام دهد آزمایشی که برای باب تهیه خواهد شد همان چیزی است که انتظار داریم. حال سوال این است که حالت های چهارگانه $|a_i\rangle$ را چگونه درست کرده و چگونه یک اندازه گیری در این پایه انجام دهیم. برای این کار آلیس یک کیوبیت کمکی را در اختیار می گیرید. وی می تواند این کیوبیت را در حالت $|0\rangle$ قرار دهد. در این صورت حالت این کیوبیت و حالت قبلی به صورت زیر خواهد بود:

$$|\Psi\rangle_{A',A,B} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0, 0\rangle + |0, 1, 1\rangle) \quad (110)$$

که در آن A' را برای نمایش کیوبیت کمکی آلیس به کار برده ایم. آلیس می تواند روی کیوبیت A' یک عملگر هادامارد اعمال کند. عملگر هادامارد به صورت زیر عمل می کند:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (111)$$

در این صورت حالت بالا به شکل زیر در می آید:

$$|\Psi'\rangle_{A',A,B} = \frac{1}{2} (|0, 0, 0\rangle + |0, 0, 1\rangle + |1, 0, 0\rangle + |1, 1, 1\rangle) \quad (112)$$

دو کیوبیت A و A' اکنون در چهار حالت متعامد ولی اندازه گیری روی این کیوبیت ها توسط آلیس آزمایشی دلخواه را برای باب درست نمی کند. برای اینکه چنین آزمایشی تهیه کند، آلیس از این نکته استفاده می کند که حالت فوق را با توجه به تساوی

$$|00\rangle + |11\rangle = |++\rangle + |--\rangle \quad (113)$$

می تواند به صورت زیر نیز بنویسد:

$$|\Psi'\rangle_{A',A,B} \longrightarrow \frac{1}{2} (|0, 0, 0\rangle + |0, 0, 1\rangle + |1, +, +\rangle + |1, -, -\rangle) \quad (114)$$

حال آلیس می تواند روی کیوبیت هایش یک عملگر کنترلی به صورت زیر اعمال کند

$$U_{A',A} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes H. \quad (115)$$

این نوع عملگرها که بعدها بیشتر با آن ها آشنا خواهیم شد، روی کیوبیت دوم عملی را انجام می دهند که به وضعیت کیوبیت اول وابسته است. در این جا اگر کیوبیت اول یعنی A' در حالت 0 باشد عملگر روی کیوبیت دوم یعنی A کاری نمی کند ولی اگر کیوبیت اول در حالت 1 باشد، روی کیوبیت دوم عملگر H اعمال می شود. بنابراین با اعمال این عملگر خواهیم داشت:

$$|\Psi''\rangle_{A',A,B} = U_{A',A}|\Psi\rangle_{A',A,B} = \frac{1}{2}(|0,0,0\rangle + |0,0,1\rangle + |1,0,+\rangle + |1,1,-\rangle). \quad (116)$$

حال آلیس می تواند روی چهار حالت متعامد از دو کیوبیت خودش یک اندازه گیری متعامد انجام دهد و آنرا مبل گفته شده را برای باب تهیه کند. دقت کنید که تمام این اعمال توسط آلیس انجام شده و باب هیچ گونه دخالتی در این مورد نکرده است و هیچ گونه اطلاعی هم از اعمالی که انجام شده ندارد.

۲.۹ قضیه GHJW

در بخش قبلی با ذکر مثال هایی دیدیم که چگونه وقتی آلیس و باب یک حالت مشخص را به اشتراک گذارده اند، آلیس می تواند با اندازه گیری کیوبیت خودش در پایه های مختلف آنرا مبل های مختلفی را برای باب تهیه کند. البته باب هیچ گونه اطلاعی از عمل آلیس کسب نمی کند. حال می خواهیم این قضیه را به طور کلی ثابت کنیم. این قضیه قضیه GHJW نامیده می شود و بیان می کند تمام آنرا مبل های مختلف را برای یک ماتریس چگالی ρ_B می توان با اندازه گیری در پایه های مناسب توسط A روی یک حالت $|\Psi\rangle_{AB}$ بدست آورد. در اینجا حالت $|\Psi\rangle_{AB}$ به طور یکتا تعیین نمی شود. نام این قضیه از نام کاشفان آن یعنی *Gisin, Hughston, Jozsa* و *Wootters* گرفته شده است. در واقع اثبات این قضیه خیلی خیلی ساده است.

برای اثبات این قضیه ماتریس چگالی ρ_B و یک تجزیه آنرا مبل از آن را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\rho_B = \sum_{i=1}^M p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \quad (117)$$

سوال این است که آیا یک حالت خالص مثل $|\Psi\rangle_{AB}$ وجود دارد که آلیس بتواند با اندازه گیری مناسبی روی ذره خودش این تجزیه آنرا مبل را برای باب تهیه کند؟ پاسخ این سوال به سادگی با یک خالص سازی برای ماتریس چگالی ρ_B پیدا می شود. این خالص سازی به شکل زیر

است:

$$|\Phi\rangle := \sum_{i=1}^M \sqrt{p_i} |\alpha_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle \quad (118)$$

که در آن $\{|\alpha_i\rangle\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت M بعدی برای آلیس است. آلیس با اندازه‌گیری در این پایه آنزاملیل $\{p_i, |\phi_i\rangle\}$ را برای باب تهیه می‌کند.

۱۰ تمرین‌ها:

■ یک ماتریس چگالی به صورت $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$ داده شده است. ماتریس $\rho^{\frac{1}{2}}$ را برحسب ماتریس‌های پائولی بنویسید.

■ ماتریس چگالی یک ذره (به بیان دقیق تر آنزاملیلی از ذرات) به صورت زیر داده شده است:

$$\rho = A \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' e^{-a(x+x'-b)^2} |x\rangle \langle x'| \quad (119)$$

الف: مقدار A را تعیین کنید.

ب: اگر روی این ذرات اندازه‌گیری مکان انجام دهیم، احتمال بدست آوردن نتیجه‌ی x چقدر است. به عبارت بهتر تابع احتمال $P(x)$ چقدر است؟

ج: اگر روی این ذرات اندازه گیری تکانه انجام دهیم، احتمال بدست آوردن نتیجه ی p چقدر است. به عبارت بهتر تابع احتمال $P(p)$ چقدر است؟

د: کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle X \rangle, \quad \langle X^2 \rangle, \quad \langle P \rangle, \quad \langle P^2 \rangle. \quad (120)$$

■ یک حالت دلخواه ρ در کره بلوخ در نظر بگیرید. کدام حالت های خالص مثل $|\phi\rangle$ هستند که در رابطه ی $\langle \phi | \rho | \phi \rangle = 0$ صدق می کنند؟
کدام حالت ها هستند که در رابطه $\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \frac{1}{2}$ صدق می کنند.

■ یک حالت دلخواه ρ در کره بلوخ در نظر بگیرید. کدام حالت های مخلوط مثل σ هستند که در رابطه ی $tr(\rho\sigma) = 0$ صدق می کنند؟

■ یک باریکه ذرات مخلوطی است از ذراتی که در حالت های زیر هستند:

$$\begin{aligned} |z+\rangle, & \quad 10 \text{ percent} \\ 4|z-\rangle, & \quad 40 \text{ percent} \\ |x+\rangle, & \quad 50 \text{ percent}. \end{aligned} \quad (121)$$

روی این باریکه اندازه گیری اسپین انجام می دهیم. کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle S_x \rangle, \quad \langle S_z \rangle. \quad (122)$$

■ دو ذره در حالت $|\phi\rangle = a|00\rangle + b|11\rangle$ هستند. ذره اول دست آلیس و ذره دوم دست باب است.

الف: ماتریس چگالی باب چیست؟

ب: فرض کنید که آلیس روی ذره خود یک اندازه گیری در راستای $z \cos \theta + x \sin \theta$ انجام می دهد. این اندازه گیری باعث می شود که ما بتوانیم یک تجزیه از ماتریس چگالی باب بدست آوریم. این تجزیه را مشخص کنید.

■ دو ذره در حالت کاملاً درهم تنیده‌ی $|\phi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle)$ هستند. ذره اول دست آلیس و ذره دوم دست باب است. آلیس و باب ذرات خود را در راستاهای \hat{m} و \hat{n} اندازه می‌گیرند.

الف: احتمال اینکه هردو نتیجه‌ی +1 بدست آورند، یعنی $P(+1, +1)$ چقدر است. $P(+1, -1)$ و $P(-1, -1)$ و $P(-1, +1)$ را محاسبه کنید.

ب: مقدار متوسط $\langle \hat{S}_m^1 \hat{S}_n^2 \rangle$ را حساب کنید.

■ این گزاره را نقد کنید و با یک مثال ساده نشان دهید که همواره درست نیست: هر ماتریسی مثل A که ویژه مقادیرهای مثبت یا صفر باشند حتماً در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\langle v|A|v\rangle \geq 0, \quad \forall v. \quad (123)$$

ماتریس A چه شرط اضافه‌ای باید داشته باشد تا این گزاره برایش درست باشد.

■ یک ذره اسپین ۱/۲ را در نظر بگیرید. ویژه بردارهای عملگرهای پاولی را به ترتیب زیر می‌نویسیم:

$$|x\pm\rangle, \quad |y\pm\rangle, \quad |z\pm\rangle. \quad (124)$$

نشان دهید که ویژه بردارهای مربوط به عملگرهای مختلف در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$|\langle x \pm | y \pm \rangle|^2 = |\langle x \pm | z \pm \rangle|^2 = |\langle y \pm | z \pm \rangle|^2 = \frac{1}{2}. \quad (125)$$

به این ترتیب سه پایه مختلف برای فضای C^2 یافته ایم که اندازه ضرب داخلی هر برداری از یک پایه نسبت به یک بردار از پایه دیگر مقدار مساوی دارد. به طور کلی اگر برای یک فضای برداری C^d دو پایه به صورت زیر پیدا کنیم

$$B = \{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_d\rangle\}, \quad B' = \{|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, \dots, |\beta_d\rangle\}, \quad (126)$$

که در آن شرط زیر برقرار باشد

$$|\langle \alpha_i | \beta_j \rangle|^2 = c, \quad (127)$$

که در آن c یک ثابت است می‌گوییم این دو پایه نسبت به هم متوازن هستند^{۱۲}.

■ در فضای C^3 عملگرهای X, Z, XZ, XZ^2 را در نظر بگیرید. ویژه بردارهای مربوط به هر کدام از این عملگرها را حساب کنید. نشان دهید که چهارپایه ای که پیدا می‌کنید همگی نسبت به هم متوازن هستند.

■ حالت آمیخته زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} |\phi_+\rangle \langle \phi_+| + \frac{1}{2} |\phi_-\rangle \langle \phi_-|, \quad (128)$$

که در آن $|\phi_{\pm}\rangle$ حالت های بل هستند. در نگاه اول این حالت به صورت ترکیب محدبی از دو حالت درهم تنیده نوشته شده است. نشان دهید که این حالت را به صورت ترکیب محدبی از دو حالت ضربی نیز می‌توان نوشت.

■ فرض کنید که حالت اولیه یک نوسانگر هارمونیک با هامیلتونی $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ یک حالت همدوس است، یعنی $|\psi(0)\rangle = |z\rangle$. نشان دهید که در هر زمان دیگر نیز حالت این ذره یک حالت همدوس است. این حالت را محاسبه کنید. هم چنین مقادیر کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle x(t) \rangle, \quad \langle p(t) \rangle. \quad (129)$$

■ دو ذره در نظر بگیرید که در لحظه صفر هر دو در حالت همدوس هستند، یعنی:

$$|\psi(0)\rangle = |z\rangle |w\rangle. \quad (130)$$

Mutually Unbiased Bases (MUB)^{۱۲}

این دو ذره تحت هامیلتونی زیر هستند:

$$H = \omega(a^\dagger a + b^\dagger b) + \lambda(a^\dagger b + ab^\dagger)$$

که در آن a^\dagger ، a ، مربوط به ذره اول و b^\dagger ، b ، مربوط به ذره دوم است. حالت ذره را در یک زمان دلخواه محاسبه کنید.

■ تابع مشخصه حالت پایه یک نوسانگر هارمونیک را حساب کنید و نشان دهید که این حالت یک حالت گاوسی است.

■ حالت زیر را که موسوم به یک حالت گرمایی است در نظر بگیرید:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta a^\dagger a}. \quad (۱۳۱)$$

یک - پارامتر Z را حساب کنید. سپس متوسط تعداد فوتون ها را حساب کنید.

دو - تابع مشخصه این حالت را حساب کنید و نشان دهید که این حالت نیز یک حالت گاوسی است.

سه - نشان دهید که یک حالت که در آن تعداد فوتون ها دقیقا مشخص است یک حالت گاوسی نیست.

■ نشان دهید که یک حالت فشرده نیز یک حالت گاوسی است.